

2. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $M = \{x\}$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ je daný.

Z definice je zřejmé, že $H(M) = M \subset M$, tedy M je uzavřená. Platí tedy, že $\overline{M} = M$.

Jelikož M sestává z jediného bodu, nemůže se stát, že by M obsahovalo kouli. Proto $\text{Int } M = \emptyset$ a M není otevřená.

Příklad 1 (b) $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná a konečná.

Z příkladu 1 (a) plyne, že bod je uzavřená množina. M je tedy, jakožto konečné sjednocení uzavřených množin, uzavřenou množinou dle věty 5. Tedy platí, že $\overline{M} = M$.

Označme $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ukážeme, že pro každé $i = 1, \dots, n$ je $x_i \notin \text{Int } M$. Tj. ukážeme, že M neobsahuje kouli o středu x_i .

Definujme $\delta := \min\{\rho(x_i, x_j) : j \in \{1, \dots, j\}, j \neq i\}$ (nejmenší vzdálenost bodu x_i od ostatních bodů množiny M). Pak pro $r \in (0, \delta)$, $j \in \{1, \dots, j\}, j \neq i$: $x_j \notin B(x_i, r)$. Tedy platí, že $B(x_i, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Dokázali jsme, že M neobsahuje žádnou otevřenou kouli o středu x_i (pokud by takovou obsahovala, musela by obsahovat i $B(x_i, r)$).

Proto $\text{Int } M = \emptyset$ a M není otevřená.

Z rovnosti $\overline{M} = H(M) \cup M$ plyne, že $H(M) = \overline{M} = M$.

Příklad 1 (c) $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Pro $x \in M$ nalezneme $r \in (0, \min\{x, 1-x\})$. Pak $B(x, r) \subset M$, tedy každý bod M je jejím vnitřním bodem. Proto platí, že M je otevřená a $\text{Int } M = M$.

Co se bodů hranice týče, ukažme, že $0 \in H(M)$. Pro $r > 0$ zřejmě platí, že $B(0, r) \cap M \neq \emptyset$, neb $B(0, r) = (-r, r)$. Zároveň však $B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r, r) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) \neq \emptyset$. Z toho plyne, že 0 je hraničním bodem M . Analogicky se ukáže, že $1 \in H(M)$.

Uvažme nyní $x \notin [0, 1]$. Ukážeme, že $x \notin H(M)$. Necht' $r \in (0, \min\{|x|, |1-x|\})$. Pak $B(x, r) = (x-r, x+r)$. Jelikož x je od nuly vzdáleno o $|x|$ a $r < |x|$, tak platí, že $0 \notin B(x, r)$. Podobně $1 \notin B(x, r)$. Z toho plyne, že $(\mathbb{R} \setminus M) \cap H(M) = \emptyset$. Tedy $H(M) = \{0, 1\}$



Příklad 1 (d) $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Podobně jako výše se ukáže, že $(0, 1)$ je otevřená podmnožina M a $H(M) = \{0, 1\}$. Snadno se dá ukázat, že 0 a 1 nejsou vnitřní body M . Jelikož $H(M) \subset M$,

tak M je uzavřená. Zároveň ne všechny body M jsou vnitřní, takže M není otevřená.

Příklad 1 (e), (f), (g), (h) analogicky jako výše.

Příklad 1 (i) $M = \mathbb{N}$.

Z toho, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $B(n, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = n$, plyne, že $\text{Int } M = \emptyset$ a $H(M) = M$. Z toho dostáváme, že $\overline{M} = M \cup H(M) = M$. Množina M tedy je uzavřená a není otevřená.

Příklad 1 (j) $M = \mathbb{Q}$

Jelikož otevřené koule v $\mathbb{R}$ jsou intervaly a dle věty 8 z minulého semestru plyne, že každý interval obsahuje iracionální číslo, tak M neobsahuje žádnou otevřenou kouli. Proto $\text{Int } M = \emptyset$. Navíc $M \neq \emptyset$, proto M není otevřená.

Z téže myšlenky vyplývá, že (neb každý interval obsahuje i racionální číslo), že každé reálné číslo je bodem hranice M . Tedy $H(M) = \mathbb{R}$. Proto $\overline{M} = \mathbb{R} \neq M$ a M není uzavřená.

Příklad 1 (k) $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dle věty 4 z přednášky plyne, že M není ani uzavřená, ani otevřená. Stejnými úvahami jako výše dojdeme k tomu, že $\text{Int } M = \emptyset$, $H(M) = \mathbb{R}$, $\overline{M} = \mathbb{R}$.

Příklad 1 (l) $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Množina M obsahuje 1 a bod v $M \setminus \{1\}$, který je mu nejbližší, je zřejmě $\frac{1}{2}$. Z toho plyne, že bod $1 \notin \text{Int } M$, jelikož $B(1, \frac{1}{3})$ není podmnožinou M . Platí tedy, že M není otevřená. Obdobným argumentem dostáváme, že $\text{Int } M = \emptyset$.

Dále z toho plyne, že $M \subset H(M)$, neb pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ t.ž. $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$.

Zbývá otázka, zda ještě nějaký další bod $x \in \mathbb{R}$ je hraničním bodem M .

Jelikož $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, je pravděpodobné, že $0 \in H(M)$. Ověřme si to. Zvolme $r > 0$ libovolné. Pak $B(0, r) = (-r, r)$. Jelikož 0 je infimem množiny M , tak M neobsahuje záporná čísla. Proto $B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \emptyset$. Zároveň z faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ vyplývá, že existuje $n \in \mathbb{N}$ t.ž. $\frac{1}{n} \in B(0, r)$. Proto $0 \in H(M)$.

Uvažujme nyní $x \in \mathbb{R} \setminus (M \cup \{0\})$ a ukažme, že $x \notin H(M)$. Pokud $x < 0$, pak nalezneme $r > 0$ t.ž. $0 \notin B(x, r)$. Pak $B(x, r) \cap M = \emptyset$, a proto $x \notin H(M)$. Podobně postupujeme i pro $x > 1$. Je-li $x \in (0, 1)$, pak nalezneme $n \in \mathbb{N}$ t.ž. $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Pak zvolme $r \in (0, \min\{|x - \frac{1}{n+1}|, |\frac{1}{n} - x|\})$. Zřejmě platí, že $B(x, r) \cap M = \emptyset$, jelikož r je menší, než vzdálenost x od nejbližšího bodu z M .

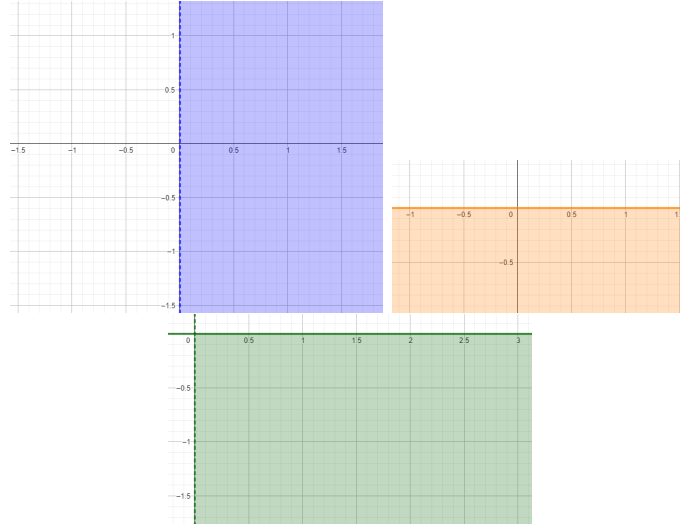
Platí tedy, že $H(M) = M \cup \{0\}$ a $\overline{M} = H(M)$. Jelikož $\overline{M} \neq M$, tak M není uzavřená.

Příklad 1 (m), (n) Analogicky jako 1 (l).

Příklad 2 (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}$.

Definujme $M_1 := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, $M_2 := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}$. Pak $M = M_1 \cap M_2$.

Nakresleme si M_1, M_2 a pak M .



Vidíme, že M neobsahuje celou svou hranici (dolní poloosu y). Proto M není uzavřená. Zároveň obsahuje část své hranice tedy není ani otevřená.

$$\text{Int } M = [x > 0] \cap [y < 0], H(M) = [x \geq 0, y = 0] \cup [x = 0, y \leq 0].$$

Příklad 2 (b) Laskavý čtenář si dokáže sám.

Příklad 2 (c) Jednotková kružnice bez bodu $[1, 0]$

Zřejmě M není otevřená, neb uvažujeme-li $B(x, r)$, $x \in M$, $r > 0$, pak existuje $y \in B(x, r)$ t.ž. $\rho(0, y) \neq 1$, tedy $y \notin M$.

Zjistíme $H(M)$. Z právě uvedené myšlenky plyne, že $M \subset H(M)$ (pro body mn. M je definice hraničního bodu zřejmě splněna). Věnujme se nyní dalším bodům - zda jsou či nejsou hraniční (hraniční bod nemusí být prvkem množiny M).

Definujme $f(x, y) = x^2 + y^2$. Pak $M = [f = 1] \setminus \{[1, 0]\}$.

Množiny $[f > 1]$, $[f < 1]$ jsou otevřené a neprotínají M . Proto neobsahují hraniční body (viz argumentaci v příkladu 2 (f)).

Zbývá tedy ukázat, že bod $[1, 0]$ je hraničním bodem (což se dá tušit z obrázku).

Přejdeme nyní k polárním souřadnicím - tj. bod na množině $[f = 1]$ je dán úhlem $\varphi \in [0, 2\pi]$ (a poloměrem 1). Bod množiny $[f = 1]$ příslušný úhlu φ je $[\cos \varphi, \sin \varphi]$. Jeho vzdálenost od bodu $[1, 0]$ je

$$\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + (0 - \sin \varphi)^2} = \sqrt{1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

Pro $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ je tato vzdálenost spojitou rostoucí funkcí. Proto pro každé $r \in (0, \sqrt{2})$ existuje $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ takové, že pro každé $\varphi \in (0, \theta)$ je $\rho([\cos \varphi, \sin \varphi], 0) < r$. Z toho dostáváme, že pro každé $r > 0$ existuje $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ t.ž. $[\cos \varphi, \sin \varphi] \in M \cap B([1, 0], r)$. Zároveň zřejmě $[x, \frac{r}{2}] \in B([1, 0], r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M)$. Ověřili jsme definici hraničního bodu, bod $[1, 0]$ je tedy hraničním bodem mn. M .

Příklad 2 (d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

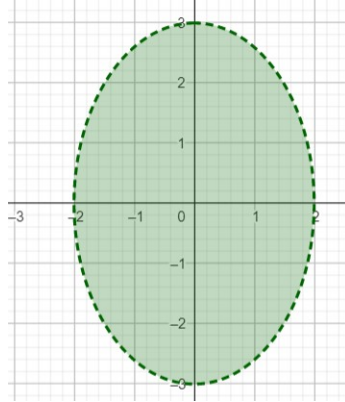
Z předpisu pro elipsu víme, že M je elipsou o středu $[0, 0]$ a x -ové poloose velikosti 2 a y -ové velikosti 3.

Jinak lze podobu M odvodit následujícím způsobem:

$$M = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \right] = \left[y^2 < 9 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) \right] = \left[-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} < y < 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right]$$

M je tedy prostor mezi grafy funkcí $f_1(x) = -9 + \frac{9x^2}{4}$ a $f_2(x) = 9 - \frac{9x^2}{4}$.

Je-li $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, pak $M = [f < 1]$ a dle věty 11 je otevřená. Z toho dostáváme, že $\text{Int } M = M$ a M není uzavřená. Podobně jako ve 2 (f) odvodíme, že $H(M) = [f = 1]$ (ověříme, že $[f = 1] \subset H(M)$ a že $[f > 1] \cap H(M) = \emptyset$).

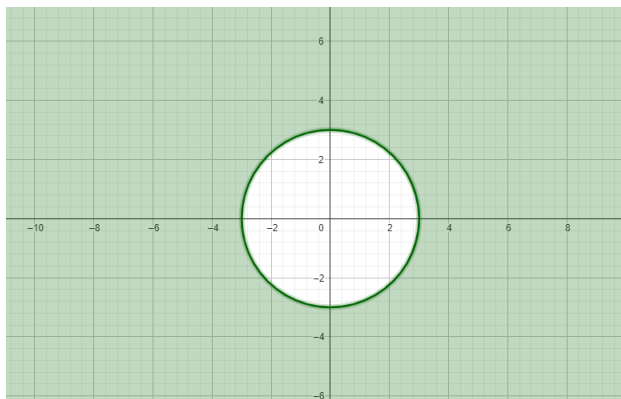


Příklad 2 (e) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$.

Ze střední školy víme, že kružnice o poloměru 3 a středu $[0, 0]$ v $\mathbb{R}^2$ je $x^2 + y^2 = 9$. Z toho dostáváme, že M je kružnice se středem v počátku a poloměrem 3 a vše okolo ní.

Alternativně:

$$M = [y^2 \geq 9 - x^2] = [|y| \geq \sqrt{9 - x^2}] = [-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}]$$



Rovnost je povolena, tedy krajní body tam patří.

Příklad 2 (f) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}$

Definujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x, y) = e^y + x^2$.

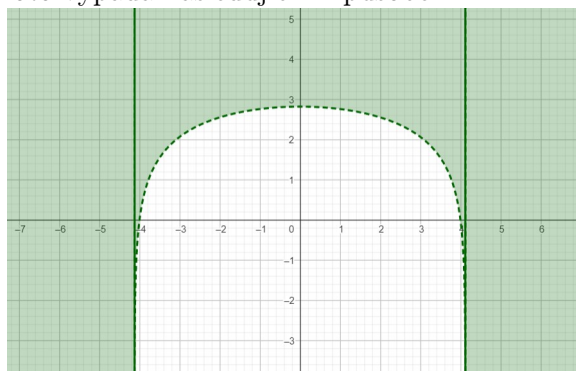
Pak $M = [f > 17]$. Funkce f je spojitá, tedy podle věty 11 je M otevřená.

$$M = [e^y > 17 - x^2]$$

Je-li $17 - x^2 \leq 0$, pak je nerovnost $e^y > 17 - x^2$ splněna pro libovolné y , neb $e^y > 0$ vždy. Pokud $17 - x^2 > 0$, pak lze nerovnost zlogaritmovat, čímž dostáváme nerovnost $y > \ln(17 - x^2)$. Z toho vyplývá následující rovnost.

$$M = [y > \ln(17 - x^2)] \cup [x^2 \geq 17]$$

Množina M proto vypadá následujícím způsobem.



Zbývá určit $H(M)$. Ukažme, že $[f = 17]$ je hranicí množiny M .

Nejdříve ukážeme, že $[f = 17] \subset H(M)$. Nechť $[x, y] \in [f = 17]$. Tedy platí, že $e^y + x^2 = 17$. Zvolme $r > 0$ libovolně. Chceme ukázat, že $B([x, y], r) \cap M \neq \emptyset$ a $B([x, y], r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Nechť $\delta \in (0, r)$. Pak $[x, y + \delta] \in B([x, y], r)$. Ukážeme, že $[x, y + \delta] \in M$. Stačí ověřit, že $e^{y+\delta} + x^2 > 17$. Je-li $t \mapsto e^t$ je rostoucí. Proto $e^y < e^{y+\delta}$. Z toho dostáváme, že platí požadovaná nerovnost.

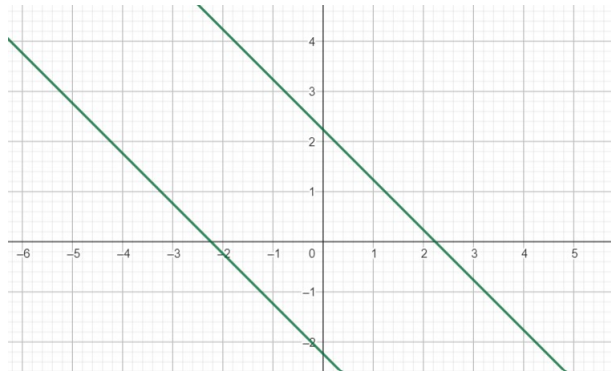
Ukažme ještě, že $[x, y - \delta] \in B([x, y], r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M)$. Tím ověříme druhou podmínku v definici hraničního bodu.

Stejným argumentem dostáváme, že $e^{y-\delta} < e^y$, z čehož vyplývá, že $e^{y-\delta} + x^2 < 17$. Proto $[x, y - \delta] \notin M$.

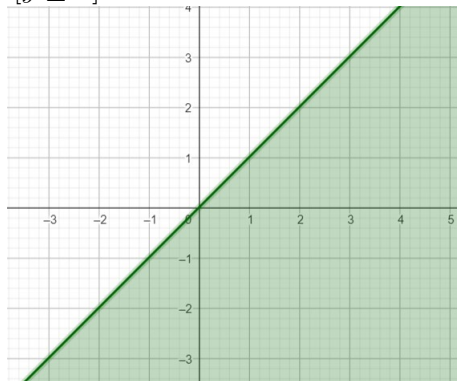
Ukázali jsme, že $[f = 17] \subset H(M)$. Ukažme nyní, že $\mathbb{R}^n \setminus (M \cup [f = 17])$ neobsahuje hraniční body M . Platí, že $\mathbb{R}^n \setminus (M \cup [f = 17]) = [f < 17]$. Z věty 11 víme, že $[f < 17]$ je otevřená. Tzn., že každý její bod je vnitřním bodem této množiny. Máme-li tedy bod $[x, y] \in [f < 17]$, pak existuje $r > 0$ t.ž. $B([x, y], r) \subset [f < 17]$. Z toho dostáváme, že $B([x, y], r) \cap M = \emptyset$. Nemůže být tedy splněna definice hraničního bodu. Proto žádné další hraniční body nejsou a $H(M) = [f = 17]$.

Příklad 2 (g) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$

$$\begin{aligned} M &= [(x+y)^2 = 5] = [|x+y| = \sqrt{5}] = [x+y \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}] = \\ &= [y = -x - \sqrt{5}] \cup [y = -x + \sqrt{5}] \end{aligned}$$

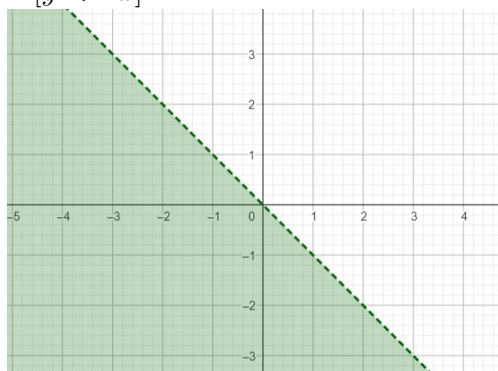


Příklad 2 (h) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| = x - y\}$
 $M = [x - y \geq 0] = [y \leq x]$



Příklad 2 (i) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| > x + y\}$

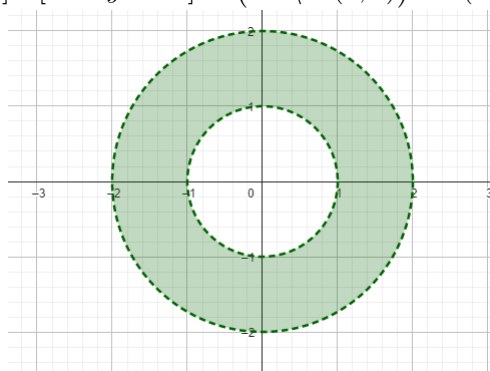
$$M = [x + y < 0] = [y < -x]$$



Příklad 2 (j) analogicky

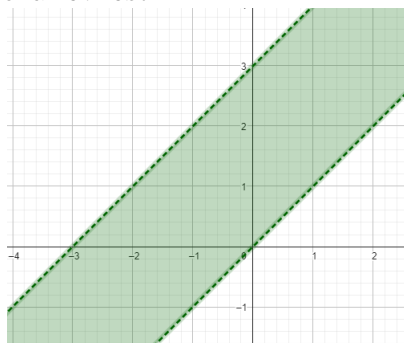
Příklad 3 (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

$$M = [1 < x^2 + y^2] \cap [x^2 + y^2 < 4] = (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)) \cap B(0, 4) = B(0, 4) \setminus B(0, 1)$$



Příklad 3 (b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < y < x + 3\}$

M je sevřeno přímkami $y = x$ a $y = x + 3$, přičemž přímky nepatří do M , neb v nerovnicích není povolena rovnost.

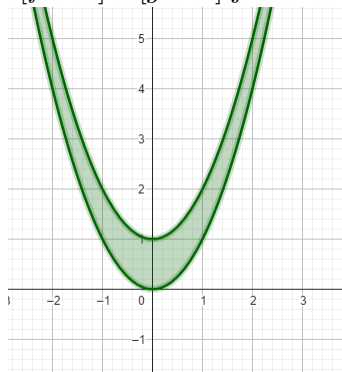


Příklad 3 (c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$

$M = [f \leq 0] \cap [g \leq 0]$, pro funkce $f(x, y) = x^2 - y, g(x, y) = y - x^2 - 1$. Funkce f i g jsou spojité (složení spojitých funkcí - sčítání a násobení a mocnina jsou spojité funkce), tedy podle věty 11 je M průnikem dvou uzavřených množin. Dle věty 5 je proto množina M uzavřená.

Jelikož v $\mathbb{R}^n$ jsou jediné obojetné (tj. otevřené i uzavřené zároveň) množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$, není množina M otevřená.

Z definice lze ukázat, že $[f = 0] \cup [g = 0]$ je hranicí množiny M .



Příklad 3 (d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$

$M = [x < -1] \cup [x > 1]$

